

## A MECÂNICA CELESTE

Sylvio Ferraz-Mello e Júlio César Klafke

### INTRODUÇÃO

A Mecânica Celeste é a ciência que estuda o movimento dos corpos celestes a partir das leis da gravitação. Foi fundada por Newton e é o mais antigo dos capítulos da Astronomia Física. A Mecânica Celeste é uma ciência que tem uma história. Começaremos este texto pelo período pré-newtoniano, pois nenhuma ciência se constrói inteira de um momento para outro; continuaremos mostrando o que foi a revolução newtoniana e as suas principais conquistas em mais de 200 anos; passaremos a seguir para a grande revolução da Física deste século, que é a Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Em seguida, apresentaremos um panorama da Mecânica Celeste de hoje e dos problemas de que se ocupa, tanto na Astronomia do Sistema Solar como de sistemas outros dentro de nossa galáxia, e de suas íntimas relações com as ciências matemáticas.

### A CINEMÁTICA CELESTE PRÉ-NEWTONIANA

A história da representação matemática do movimento dos planetas começa na Antiguidade e, apesar das idéias erradas que então se tinha do sistema do

mundo, com a Terra no seu centro (geocentrismo), as previsões que se faziam dos movimentos planetários eram bastante acuradas, permitindo prever os eclipses e manter os calendários em bom sincronismo com o movimento da Terra ao redor do Sol. O método dos epiciclos, introduzido por Apolônio de Perga, por volta do ano 200 a.C., nada mais era do que uma representação do movimento passado em série trigonométrica. A sua extrapolação para o futuro era tão boa que durante quase dois mil anos foi suficiente para fazer as previsões de que necessitavam as atividades humanas, aliás, estagnadas pelo obscurantismo que por mais de um milênio dominou o Ocidente. No século XVI, Copérnico revolucionou postulando um novo sistema do mundo, heliocêntrico. Mas, para o conhecimento dos movimentos planetários, os dois nomes maiores desse período são Tycho Brahe e Johannes Kepler. Tycho, em seu observatório em Uraniborg, fez uma precisa série de observações dos planetas durante vinte anos. Kepler, herdeiro das observações de Tycho, as utilizou para deduzir as três leis que levam o seu nome (Figura 4.1):

- Primeira lei ou Lei das Órbitas Elípticas (1609): *Os planetas se movem em elipses focadas no Sol.*
- Segunda lei ou Lei das Áreas (1609): *Os planetas se movem com velocidade areolar heliocêntrica (isto é, momento angular) constante.*
- Terceira lei ou Lei Harmônica (1619): *A relação entre os cubos dos eixos maiores das elipses e os quadrados dos períodos dos movimentos planetários é igual para todos os planetas.*

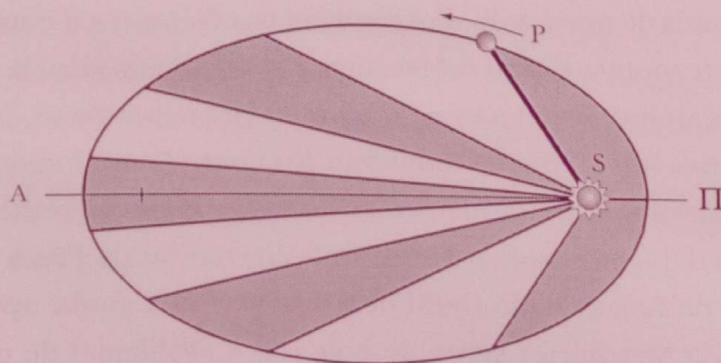


Figura 4.1. Movimento planetário de acordo com as leis de Kepler. O planeta se move com velocidade tal que a área descrita pelo raio vetor SP cresce uniformemente. (As áreas de todas as zonas demarcadas na figura são iguais, portanto, os arcos que as delimitam são percorridos em tempos iguais.) A velocidade do planeta é maior quando ele se encontra no periélio  $\Pi$  do que quando ele se encontra no afélio A.

A maneira como Kepler chegou às suas leis é um monumento ao engenho humano. Adepto da idéia heliocêntrica, seu primeiro passo deve ter sido tentar representar os movimentos planetários como movimentos circulares uniformes coplanares centrados no Sol. Mas as observações de Tycho eram muito boas e



Kepler deve ter fracassado em tal intento. Marte ora se adiantava, ora se atrasava. Kepler admitiu que a órbita de Marte ao redor do Sol era periódica e determinou o seu período; admitiu também, inicialmente, que o movimento da Terra era circular e uniforme. Passou então a determinar o movimento de Marte. Procurava nas observações de Tycho, observações separadas exatamente de um número inteiro de períodos de Marte. Pelas datas sabia onde se encontrava a Terra no momento das observações e com os ângulos medidos por Tycho, que forneciam a direção de Marte, traçava as várias linhas indicando essas direções e procurava suas intersecções. Com isso determinava completamente um triângulo cuja base era formada por duas posições da Terra, e que tinha Marte no vértice oposto. Assim ficava determinada a posição de Marte naquele ponto de sua órbita (Figura 4.2a). E assim procedendo, obteve algo próximo a uma elipse e a um movimento com velocidade areolar heliocêntrica constante. Adotou um movimento *kepleriano* (como o chamamos hoje) para Marte, e passou ao problema inverso, isto é, desenhar a órbita da Terra, o que era feito com observações separadas de um número inteiro de anos. Deste modo, concluiu que a Terra também se movia em uma elipse e seguia a Lei das Áreas (Figura 4.2b). É bom lembrar que as únicas ferramentas matemáticas de que Kepler dispunha eram a aritmética e a geometria euclidiana. A terceira lei veio muito mais tarde. Imbuído das idéias de perfeição da ciência grega, que emergiam na Europa após um obli-vio de dezesseis séculos, Kepler perdeu-se a procurar na geometria a explicação para as distâncias planetárias. E só no final de sua obra chegou à terceira lei.

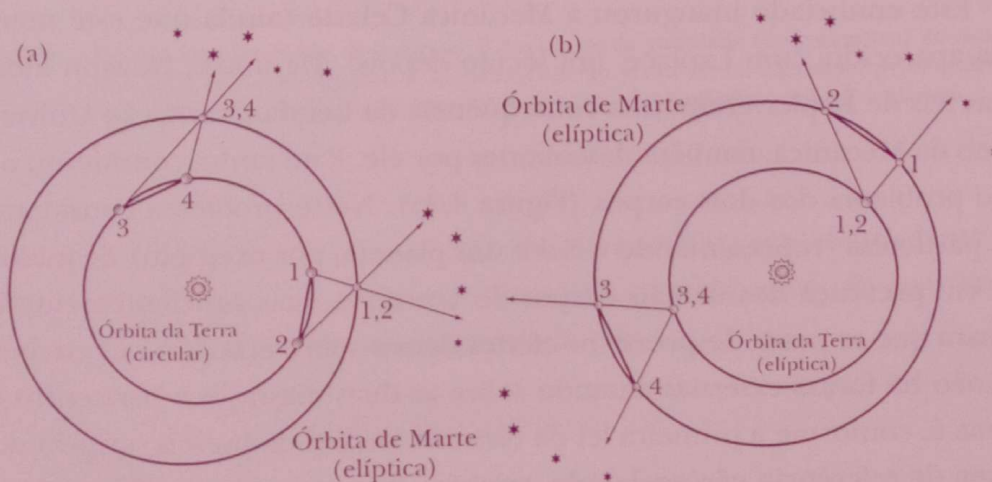


Figura 4.2. Determinação iterativa das órbitas de Marte e da Terra. Na figura (a) a posição de Marte é determinada a partir de duas observações feitas em épocas que diferem de um número inteiro de períodos de Marte. Na figura (b) a posição da Terra é determinada a partir de duas observações feitas em épocas que diferem de um número inteiro de períodos da Terra, isto é, de anos. Nos dois casos são mostrados dois exemplos distintos: os pares de observações 1,2 e 3,4. Kepler tomou as direções das linhas Terra-Marte das observações feitas por Tycho e, a partir de simples cálculo trigonométrico, construiu as órbitas de Marte e da Terra.



## A MECÂNICA CELESTE NEWTONIANA

Todos conhecem a lenda da maçã que Newton teria visto cair de uma macieira e que estaria na origem de suas teorias. De fato, a obra de Newton foi baseada em dados experimentais e observacionais. Os dados experimentais acumulados por Galileu, publicados em seu livro *Discorsi intorno a due nuove scienze* (não confundir com o *Dialogo sopra i due massimi sistema del mondo* que quase levou o Santo Ofício a condená-lo à fogueira) e os dados observacionais traduzidos pelas três leis de Kepler. A base da teoria newtoniana da gravitação surgiu do reconhecimento de que a força que mantém a Lua orbitando ao redor da Terra é a mesma que, na Terra, faz cair um objeto no solo.

Lei da Gravitação Universal (1687): *Matéria atrai matéria na razão direta das massas e inversa do quadrado das distâncias*. Isto é, a força com que dois corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  se atraem mutuamente tem o valor:

$$|\vec{f}| = \frac{G m_1 m_2}{r^2}, \quad (4.1)$$

onde  $r$  é a distância que os separa.  $G$  é uma constante universal ( $G = 6,672 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ). É a mesma não importando se estamos na Terra, no Sistema Solar, ou em uma galáxia distante.

Este enunciado inaugurou a Mecânica Celeste (ainda que este nome só tenha aparecido, com Laplace, um século depois). De início, Newton mostrou que as leis de Kepler eram uma consequência da Lei da Gravitação Universal e das leis da Mecânica, também descobertas por ele. Para tanto, considerou o chamado problema dos dois corpos (Figura 4.3a). Nesse problema consideram-se duas partículas (representando o Sol e um planeta, por exemplo) de massas  $m_1$  e  $m_2$  em presença dos demais corpos do Universo, mas suficientemente isoladas para que se possa desprezar os efeitos desses sobre elas. Em tais circunstâncias, não há forças externas atuando sobre as duas massas e o baricentro B do sistema é, conforme a primeira lei de Newton, ou Lei da Inércia, origem de um sistema de referência não acelerado, também dito inercial (e as leis da Mecânica, deduzidas por Newton, só valem em sistemas inerciais).

Aplicando as leis que descobrira, ao problema de dois corpos, assim definido, Newton foi capaz de deduzir, com rigor matemático, as leis estabelecidas por Kepler, empiricamente, quase um século antes.

A análise matemática das equações de movimento obtidas por Newton conduz a uma surpreendente coleção de resultados.



Um primeiro resultado é que o momento angular heliocêntrico do planeta é conservado. O momento angular,  $\vec{h}$ , é um vetor perpendicular, em cada instante, ao plano definido pela velocidade do planeta ( $\vec{v}$ ) e pela linha que une o planeta ao Sol (definida pelo raio-vetor,  $\vec{r}$ ) e tem por valor absoluto, ou módulo,  $|\vec{h}| = mrv \sin\theta$ , onde  $m$  é a massa do planeta. Portanto, o vetor momento angular é, ao mesmo tempo, perpendicular ao vetor velocidade e ao vetor posição (Figura 4.3b). Se esse vetor é conservado, isto é, se ele é o mesmo em todos os instantes, isto significa que (1) o plano formado pela velocidade e pelo raio-vetor é sempre o mesmo, ou seja, o movimento do planeta está num plano (se ele saísse desse plano, a direção de  $\vec{h}$  seria alterada) e (2) a lei das áreas é obedecida, pois a velocidade areolar é exatamente a área do triângulo formado pelo raio-vetor e pela velocidade (área hachurada na Figura 4.3b), ou seja, que é igual à metade do módulo do momento angular (constante) por unidade de massa. O mais interessante disso é que essas conclusões independem da lei de força considerada, no caso a lei de Newton, e dependem apenas do fato do campo de forças ser central, ou seja, ambos os vetores de força apontam para o baricentro B.

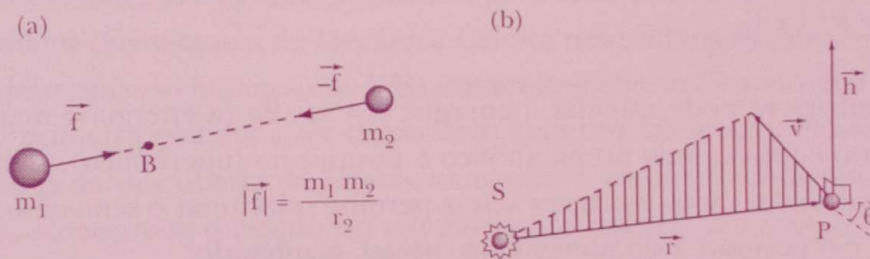


Figura 4.3. Em (a): Atração mútua de 2 corpos. B é o centro de gravidade (ou baricentro) do sistema. Em (b): Vetor momento angular,  $\vec{h}$ , perpendicular ao plano orbital (definidos pelos vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$ , respectivamente, posição e velocidade do planeta); S representa o Sol e P o planeta.

Outro resultado é a conservação da energia. Esta sim, dependente da lei de força considerada. A energia mecânica do planeta, soma de suas energias cinéticas e potencial (heliocêntrica), é dada por:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{r} = E = \text{const} , \tag{4.2}$$

com  $\mu = G(M + m)$ , onde  $M$  é a massa do Sol.

As leis de conservação da energia e do momento angular podem, ainda, ser combinadas em uma equação diferencial de primeira ordem na distância  $r$ , tendo o ângulo de posição como variável independente. Essa equação é facilmente resolvida e sua solução é:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (4.3)$$

Essa equação é a equação de uma cônica e as constantes  $e$  e  $p$  são a sua excentricidade e o seu parâmetro, que se relacionam ao momento angular e à energia pelas equações:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2 E h^2}{\mu^2 m^2}} \quad e \quad p = \frac{h^2}{\mu m^2} \quad (4.4)$$

Essa cônica é uma elipse se  $e < 1$ , uma parábola se  $e = 1$ , uma hipérbole se  $e > 1$ , ou ainda, uma circunferência, quando  $e = 0$ . Assim, os resultados de Newton generalizam os de Kepler mostrando que o movimento de um corpo atraído pelo Sol pode ser também uma parábola ou uma hipérbole, e não apenas uma elipse, como no caso dos planetas.

No caso de uma elipse, o semi-eixo maior será obtido da definição de  $p$ :

$$a = p \sqrt{1 - e^2} \quad (4.5)$$

Também se pode calcular a energia:  $E = -\mu/2a$  (a energia é negativa no movimento elíptico, nula no parabólico e positiva no hiperbólico). Além disso, a combinação das várias equações acima permite relacionar o semi-eixo maior  $a$  da elipse e o período  $T$  do movimento orbital, resultando:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4 \pi^2}, \quad (4.6)$$

que não é a mesma relação dada pela Lei Harmônica de Kepler. Este resultado mostra que a relação entre o cubo do semi-eixo maior e o quadrado do período orbital não é a mesma para todos os planetas, mas proporcional à soma das massas do Sol e do planeta; assim, esse número é maior para um planeta de maior massa e menor para um planeta de menor massa. Mas as massas planetárias ( $m$ ) são muito menores que a massa do Sol ( $M$ ) e a lei harmônica é uma excelente primeira aproximação da realidade (com uma precisão relativa de  $10^{-3}$ ).

Newton não se limitou ao problema com apenas dois corpos, mas em sua obra estudou também o movimento da Lua sob a atração mútua do Sol e da Terra. Um de seus discípulos, compreendendo o alcance da obra de Newton, decidiu aplicá-la aos cometas. Tarefa difícil já que cometas brilhantes não são frequentes. Analisando a lista dos cometas observados no passado, verificou que existiam



muitas observações separadas aproximadamente por um múltiplo inteiro de  $3/4$  de século. Estudou essas observações e concluiu que os cometas de 1531, 1607 e 1682 eram, na realidade, um único cometa, prevendo então o seu retorno para o ano 1758. O cometa, que hoje se chama cometa Halley, realmente apareceu no ano previsto, consagrando a teoria de Newton junto ao público. Mas a matemática da obra de Newton assustava os mais imediatistas e ficou muito tempo longe das considerações dos astrônomos. Ainda assim os séculos seguintes viram a gravitação ser usada com sucesso na construção de teorias dos movimentos planetários, de cometas, de satélites, nas teorias explicando a forma achatada da Terra e as variações da aceleração da gravidade à sua superfície, na teoria das marés etc. O sucesso foi tão grande que muitos começaram a acreditar que por seu intermédio deveria ser possível explicar tudo. A idéia do determinismo dos fenômenos naturais tomou corpo. Bastaria conhecer com exatidão a situação presente para determinar sua evolução futura. Com algum humor, chama-se a este ente imaginário, que estaria determinando de modo inequívoco todos os movimentos à nossa volta, de *demônio de Laplace*. Mas, como veremos na última seção, um dos caprichos da gravitação é que o determinismo das suas equações não é suficiente para tornar suas soluções previsíveis para todo o tempo.

O maior dos sucessos da Mecânica Celeste newtoniana se deu em 1846. A história deste sucesso começa em 1781 com a descoberta de um novo planeta, Urano, o primeiro planeta a ser descoberto com um telescópio. Passadas algumas décadas da descoberta de Urano, acumulado um razoável número de observações, começou-se o estudo do seu movimento que, como todos os demais, deveria ser explicado pelas equações newtonianas. Mas, não! Urano, teimosamente se afastava das soluções obtidas. O problema foi inicialmente considerado por Bessel, mas Urano havia percorrido, desde a sua descoberta, apenas um pequeno arco da sua órbita e suas tentativas de explicar o movimento de Urano foram vãs. Suas idéias foram retomadas após 1840 por Adams, na Inglaterra, e Leverrier, na França. Adams concluiu, em 1845, que as distorções na órbita de Urano eram devidas a um planeta desconhecido e forneceu com detalhes a órbita desse planeta. Mas Adams tinha apenas vinte e quatro anos e seu trabalho não foi considerado pelos astrônomos ingleses com a seriedade que merecia. No continente, Leverrier chegou aos mesmos resultados e os publicou em 1845 e 1846. E quando chegou a um resultado que considerava confiável, mandou uma carta ao Observatório de Berlim pedindo que procurassem o planeta no céu. Netuno – este é o nome que depois foi dado ao novo planeta – foi descoberto por Galle no mesmo dia em que a carta de Leverrier foi recebida, a menos de 1 grau da posição prevista!

Urano não era o único planeta a desafiar a gravitação newtoniana. Mercúrio também desviava-se das melhores soluções construídas. Um cálculo meticuloso de



Leverrier mostrou que as perturbações dos demais planetas sobre o movimento de Mercúrio faziam com que a elipse de sua órbita girasse de modo que o seu periélio avançasse cerca de 530 segundos de arco por século (277 devidos a Vênus, 153 devidos a Júpiter, 90 devidos à Terra e 11 devidos a Marte e aos demais planetas). Mas as observações mostravam que o periélio da órbita de Mercúrio deslocava-se mais rapidamente do que devia, de cerca de 40 segundos por século. Também nesse caso postulou-se que um planeta intramercuriano poderia ser o responsável pelos 40 segundos a mais. Esse planeta foi “descoberto” pelos astrônomos (até mais do que uma vez!) e mesmo batizado: Vulcano. Mas as descobertas nunca se confirmaram. E a explicação desse avanço anômalo de Mercúrio teve que esperar...

### A MECÂNICA CELESTE DEPOIS DE EINSTEIN

Em 1915, Einstein publicou os primeiros resultados de uma nova teoria da gravitação, a que chamou Teoria da Relatividade Geral. Logo em seu primeiro artigo já mostrava que um dos efeitos das correções que aportava à teoria newtoniana é que os periélios das órbitas avançavam. E no caso de Mercúrio, esse avanço era de 43 segundos por século! Estava explicado o avanço que Leverrier e Newcomb haviam encontrado.

Os mecânicos celestes estiveram entre os primeiros a explorar as consequências da Teoria da Relatividade Geral. Já em 1916 aparecia um extenso artigo de De Sitter sobre a construção das equações do movimento em Relatividade Geral. Na teoria newtoniana da gravitação, a lei que exprime a força com que dois corpos se atraem é totalmente independente do movimento desses corpos. No caso da Teoria da Relatividade Geral, o campo e o movimento se fundem em uma única lei. As chamadas equações de campo, de Einstein, permitem calcular uma matriz que fornece a curvatura do espaço-tempo em cada um dos seus pontos. Tudo o mais que a teoria diz é que o movimento de uma partícula em um campo de gravidade se dá ao longo das geodésicas do espaço-tempo. Não é, portanto, surpreendente que até agora nem mesmo o simples problema do movimento de dois corpos isolados no Universo, um ao redor do outro, tenha sido completamente resolvido.

Apenas foi possível resolver completamente as equações de Einstein em alguns casos particulares: o campo criado por um corpo esférico fixo (Schwarzschild, 1916), o campo criado por um esferóide fixo (Weyl e Levi-Civita, 1917) e o campo criado por um corpo esférico em rotação (Kerr, 1943).

No caso mais simples, o de Schwarzschild, como o corpo é esférico, o campo que ele cria à sua volta tem simetria esférica. A distância de dois pontos



nesse espaço se escreve de maneira simples, usando-se coordenadas esféricas, e as equações de campo de Einstein podem ser resolvidas sem grandes dificuldades matemáticas. Mas aqui começa uma dificuldade peculiar à Teoria da Relatividade Geral. Por exemplo, calculando as órbitas dos planetas – que serão as geodésicas do espaço-tempo com a geometria definida pela solução de Schwarzschild para as equações de Einstein – vamos encontrar que as elipses precessionam (como na Figura 4.4a). Podemos, também, calcular a relação entre o período do movimento e o semi-eixo maior da órbita e vamos encontrar uma certa função (como a Lei Harmônica, encontrada por Kepler e corrigida por Newton). Mas para chegar a este resultado, tudo o que nós supusemos sobre o campo de forças é que ele tinha simetria esférica. Se nós o deformássemos radialmente, mantendo a simetria esférica, nada se alteraria. A maneira como são medidas as distâncias dos pontos ao centro do campo é totalmente irrelevante na solução obtida. Podemos, por exemplo, imaginar duas réguas diferentes para medi-la. Uma régua linear, como a que usamos no dia-a-dia, e outra em escala quadrática (quer dizer, em que as marcas 1, 2, 3, 4, ... fossem substituídas por 1, 4, 9, 16, ...). Qual dessas réguas deve ser usada para medir a distância do planeta ao Sol? A Relatividade Geral nos diz: tanto faz! Porque as coordenadas da Relatividade Geral não têm significação física. Não são quantidades mensuráveis. Para resolver o problema é preciso construir também a teoria do processo pela qual efetuamos medidas de tempo e distância em Astronomia – em geral através de raios de luz que se propagam desde o objeto até nós – usando as mesmas coordenadas (e a mesma “régua”) que foram usadas para resolver o problema dinâmico. E aí sim, poderemos comparar os resultados da teoria dinâmica relativista com as medidas feitas. A idéia de que seja suficiente resolver o problema dinâmico relativista e interpretá-lo com as nossas medidas usuais, euclidianas, é falsa e leva a interpretações erradas.

Os astrônomos logo se aperceberam de que as correções que a Relatividade Geral aportava aos movimentos planetários eram ínfimas e, quase sempre, além da precisão das melhores observações. Por isso, e pelas dificuldades mencionadas, continuaram a ignorá-la em seus cálculos dos movimentos planetários, com exceção do avanço dos periélios, cuja importância para os quatro planetas mais internos do Sistema Solar – Mercúrio ( $42,98''/\text{século}$ ), Vênus ( $8,62''/\text{século}$ ), Terra ( $3,84''/\text{século}$ ) e Marte ( $1,35''/\text{século}$ ) – havia sido mostrada por Einstein.

Entretanto, os progressos na Astrometria do Sistema Solar com o uso de telemetria laser e radar e de radiointerferometria de longa base obrigaram à consideração plena da Relatividade Geral no estudo dos movimentos planetários e, nas últimas décadas, o problema de representar o movimento planetário em Relatividade Geral e as teorias que nos dizem como estão sendo medidos o tempo



e a distância em nosso Sistema Solar têm progredido enormemente, tornando-se um dos mais importantes temas de investigação da Mecânica Celeste moderna.

## A MECÂNICA DO SISTEMA SOLAR

Nosso Sistema Solar é composto do Sol, planetas, luas, asteróides, cometas, meteoróides etc. O movimento de todos esses corpos pode ser determinado com razoável precisão. Os que apresentam maior dificuldade são os cometas: permanecem pouco tempo em nossa vizinhança e, portanto, só são observados em um curto arco de sua órbita e, além disso, aquecidos pelo Sol emitem jatos de matéria que funcionam como pequenos motores que modificam suas trajetórias.

### *Planetas*

O movimento dos planetas, como descoberto por Kepler, se dá sobre elipses. Mas, ao contrário do que pareceu a Kepler, essas elipses não são fixas no espaço. Seus eixos giram lentamente, desenhando uma rosácea (Figura 4.4a). Do mesmo modo, os planos em que se movem também não são fixos; eles têm um movimento de precessão, isto é, rodam lentamente ao redor do eixo definido pelo momento angular orbital total dos planetas (Figura 4.4b). Tampouco são fixas as suas excentricidades e inclinações (Figura 4.5). O único parâmetro que não tem nenhuma variação sistemática é o semi-eixo maior que, como já foi dito, é inversamente proporcional à energia mecânica do planeta.

A mais interessante peculiaridade do sistema planetário está no movimento de Plutão. O semi-eixo maior da órbita de Plutão é de 5,9 bilhões de km e sua excentricidade 0,25. Seu periélio situa-se, portanto, a  $q = a(1 - e) = 4,4$  bilhões de km do Sol. Se observarmos que Netuno orbita ao redor do Sol a uma distância média de 4,5 bilhões de km, concluimos que, próximo ao seu periélio, Plutão encontra-se mais próximo do Sol do que Netuno (o que, aliás, ocorre atualmente); logo, as órbitas de Netuno e Plutão se cruzam e uma colisão poderia eventualmente ocorrer (Figura 4.6). Mas se observamos os períodos de seus movimentos atuais ao redor do Sol, respectivamente, 165,1 e 247,5 anos, vemos que os mesmos estão entre si como 2 para 3. Isto é, a cada 3 voltas de Netuno ao redor do Sol, Plutão dá 2 voltas ao redor do Sol (esta comensurabilidade caracteriza um fenômeno de ressonância orbital). E a posição relativa de ambos é tal que eles nunca se aproximam. Posições simultâneas são mostradas pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 da Figura 4.6 (que se repetem de maneira cíclica).



ca). Por exemplo, Plutão penetra na órbita de Netuno entre os instantes correspondentes às posições 2 e 3. No instante 2, Netuno está em face da posição P do periélio da órbita de Plutão, mas quando Plutão chega a P, Netuno já está em Q. Raciocínio semelhante pode ser feito para o arco entre os instantes 5 e 6. Falta apenas discutir se esta comensurabilidade é uma mera coincidência: o leitor notará que  $3 \times 165,1$  não é exatamente igual a  $2 \times 247,5$ . Há uma diferença de 0,3. De fato, os dois números não são, em um dado instante, exatamente comensuráveis. Os períodos não são constantes e a quantidade formada combinando-os com fatores 2 e 3 ( $2 \times P_{Pl} - 3 \times P_{Net}$ ) é variável; ela oscila ao redor do valor zero, com um período de cerca de 20 000 anos. Assim, as posições de Plutão às vezes avançam, às vezes atrasam, em relação às posições da Figura 4.6, que correspondem à comensurabilidade exata. Mas são avanços e atrasos de apenas uns poucos graus, sem portanto afetar a estabilidade da sua órbita.

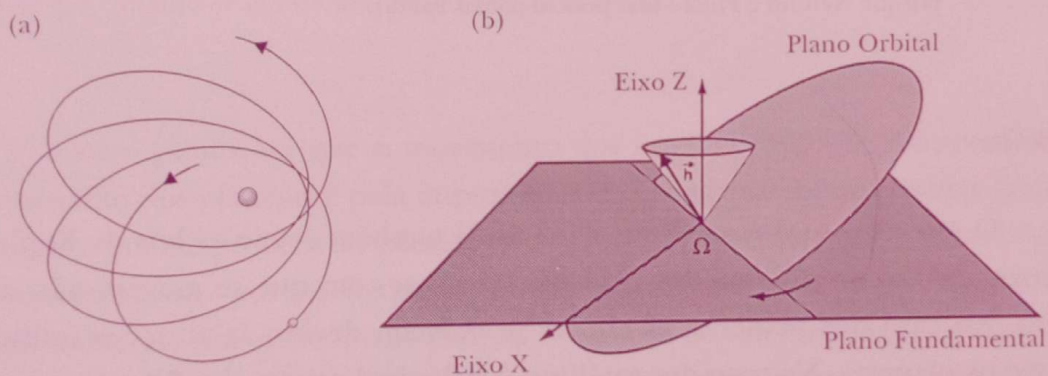


Figura 4.4. (a) Movimento do periélio da órbita: o semi-eixo maior se move e, ao invés de uma elipse fixa, temos uma rosácea. (b) Precessão do plano orbital: No caso mais simples, o momento angular,  $\vec{h}$ , que é um vetor perpendicular ao plano orbital, descreve um cone.

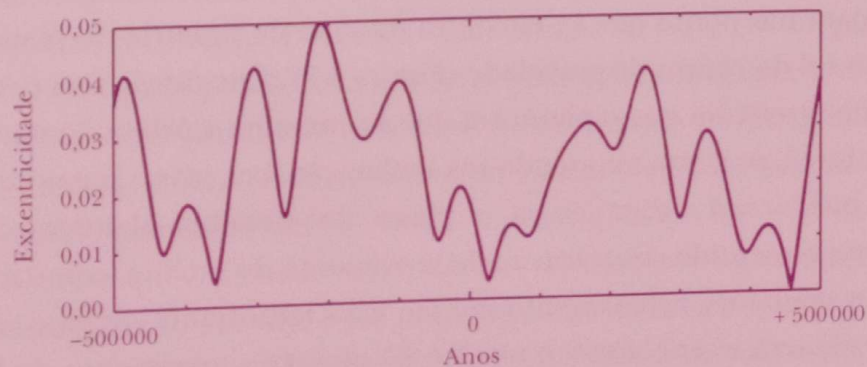


Figura 4.5. Excentricidade da órbita da Terra durante um milhão de anos (o zero no eixo horizontal corresponde ao ano 1900).

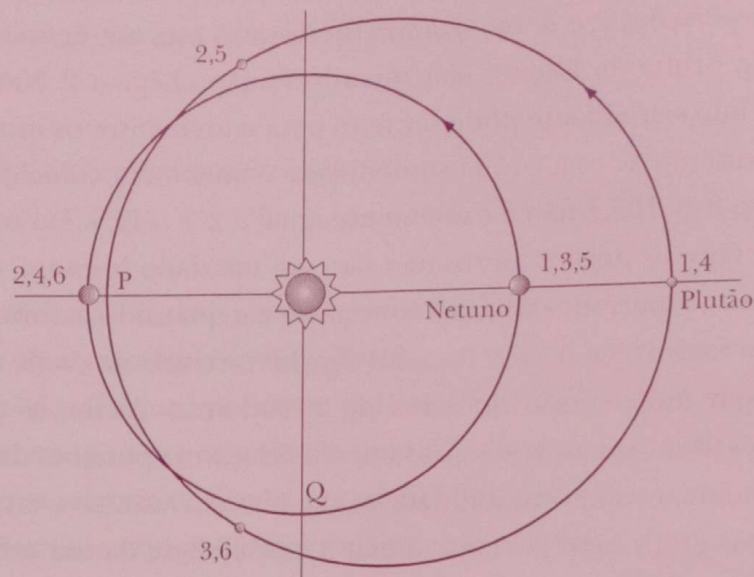


Figura 4.6. Posição relativa das órbitas de Netuno e Plutão. Os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 indicam posições simultâneas de Netuno e Plutão. Repetindo-se ciclicamente, elas mostram porque Netuno e Plutão não podem jamais colidir.

### *Satélites*

O movimento dos satélites planetários também segue as leis de Kepler. Entretanto, como no caso dos planetas, as elipses em que se movem não são fixas. No caso dos planetas, as elipses se moviam devido às atrações mútuas entre os planetas. No caso dos satélites, o principal agente é o fato de que os planetas, ao redor dos quais orbitam os satélites, são corpos achatados. O fato de que há menos massa nos pólos planetários do que no equador planetário gera uma deformação no campo de forças. Se os planetas fossem esferas homogêneas, os satélites seriam atraídos por forças dirigidas na direção do centro do planeta, mas por causa do achatamento essas forças se desviam: um satélite situado no hemisfério norte de um planeta é atraído por uma força dirigida para um ponto que se encontra no eixo de simetria do planeta, mas situado ao sul do centro de gravidade (Figura 4.7). Este desvio tem como principal efeito fazer com que o plano em que se encontra a órbita do satélite precesse, isto é, se mova, mantendo sua inclinação fixa, mas o seu nodo, a direção em que a sua órbita cruza o plano do equador planetário, circula lentamente no sentido contrário ao do movimento do satélite, como na Figura 4.4(b). Os efeitos do achatamento são tão mais importantes quanto mais próximo do planeta se encontrar o satélite. O plano do movimento da Lua gira para o oeste e completa uma volta em 18,6 anos, mas o nodo da órbita de um satélite artificial da Terra inclinada de 20 graus sobre o equador e situada a



900 km acima da superfície terrestre completa uma volta em 2 meses. De mesmo modo, move-se também o pericentro da órbita (que agora não mais chama-se periélio, pois não é mais o Sol o corpo central, mas pericentro, ou no caso de satélites da Terra, perigeo).

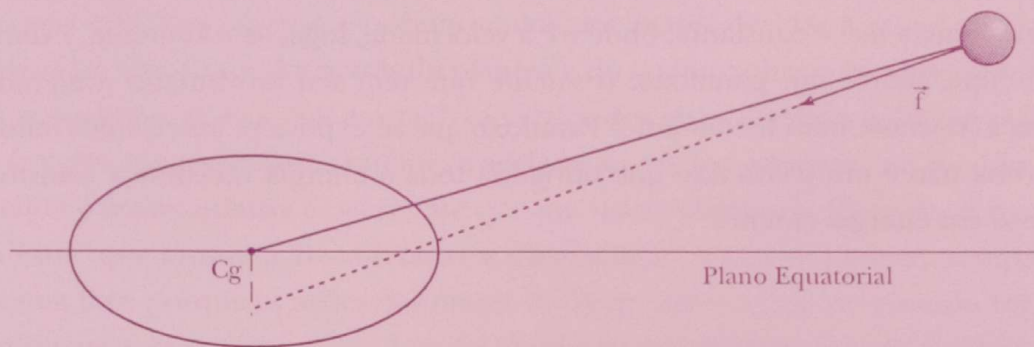


Figura 4.7. Atração de um satélite por um planeta achatado.

Outro ponto em que o movimento dos satélites muito se diferencia do movimento dos planetas é pela importância de ações dissipativas devidas às marés que o satélite provoca no planeta (e vice-versa). Se os planetas (e os satélites) fossem compostos por fluidos perfeitos, o efeito de maré seria simétrico em relação à linha que une o satélite ao planeta. A atração do satélite sobre as partes do planeta que lhe são mais próximas é maior que aquela sobre as partes do planeta que lhe são mais distantes (e vice-versa). O planeta se ovala na direção do satélite (e vice-versa). Mas o planeta não é imóvel. Ele está girando. Então, ele tenderá a arrastar, na sua rotação, as deformações devidas à maré. Se o planeta fosse constituído de um fluido perfeito, sem nenhuma viscosidade, a deformação se deslocaria instantaneamente de modo a manter o eixo da oval dirigido para o satélite. Mas isto não ocorre, pois os fluidos que constituem o interior do planeta possuem uma viscosidade. Portanto, a deformação da maré em um ponto (isto é, a maré alta naquele ponto) leva um certo tempo para se desfazer; do mesmo modo, a deformação provocada pela maré na direção do satélite não se forma instantaneamente. Como resultado desta dinâmica, o eixo da oval não está na linha que vai do planeta ao satélite. Esta assimetria gera um novo desvio na direção da força com que o planeta atrai o satélite, desviando-se ligeiramente para o ponto da maré alta do planeta, e sua projeção sobre a órbita do satélite não será nula. No caso mostrado na Figura 4.8, essa força tem o mesmo sentido que o movimento do satélite, acelerando-o. Isto faz com que a energia mecânica do satélite aumente. Fazemos algumas contas. A energia orbital é dada por:

$$E = -\frac{\mu}{2a},$$

(4.7)

e é negativa, pois o satélite está numa órbita elíptica. Logo, o valor absoluto de  $E$  diminui, e portanto  $a$  aumenta: o satélite afasta-se do planeta. O satélite afastando-se do planeta, sua velocidade diminui. Basta lembrar a terceira lei de Kepler:  $a^3/T^2 = \text{constante}$ . Se a órbita do satélite for circular, a lei harmônica é equivalente a  $av^2 = \text{constante}$ , onde  $v$  é a velocidade, logo, se  $a$  aumenta,  $v$  diminui. Aqui ocorre um paradoxo: o satélite que tem seu movimento acelerado passa a mover-se mais lentamente! Paradoxo que se explica pelos cálculos feitos: a órbita não é um trilho fixo que obrigaria toda a energia recebida a transformar-se em energia cinética.

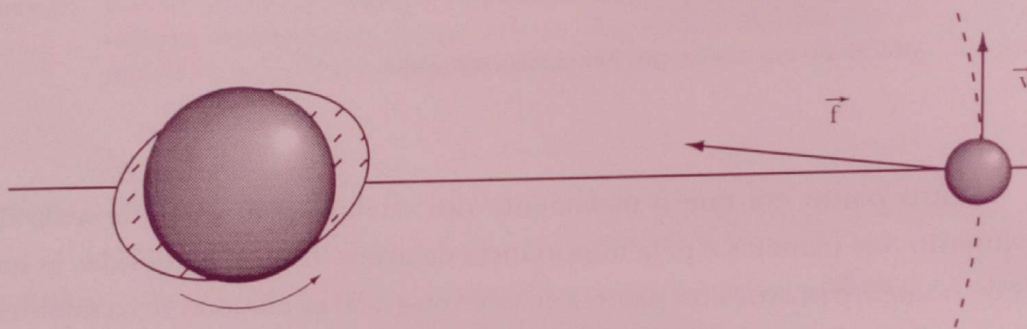


Figura 4.8. Atração de um satélite por um planeta cuja forma está ovalada pela ação das marés devidas ao próprio satélite.

O exemplo que nos é mais familiar é o da Lua. A Lua exerce uma importante ação sobre a Terra, deformando-a. Todos conhecem as marés oceânicas. Porém, a Lua não age apenas sobre as águas, mas sobre toda a Terra. A deformação do corpo da Terra é mínima: da ordem de 50 cm e com um ângulo de atraso da maré alta de cerca de 1 grau (bem diferente dos mais de 50 graus de atraso que a maré oceânica mostra em alguns mares). Embora pequena, essa deformação é suficiente para provocar um atraso no movimento da Lua (que, acelerada, se afasta da Terra), cujo período de translação ao redor da Terra está aumentando. Há dois bilhões de anos, a Lua estaria a menos de 20 000 km da Terra (hoje está a 384 000 km) e daria uma volta ao redor da Terra em apenas 6,5 horas. Nesse tempo, a Terra também estaria girando muito mais rápido ao redor do seu eixo – um dia teria apenas 5 horas. Aliás, olhando a Figura 4.8 e pensando, não na força com que o planeta age sobre o satélite, mas na atração do satélite sobre o planeta, vê-se que a assimetria da oval faz com que o momen-



to das forças de atração do satélite sobre o planeta não seja nulo e atue no sentido de frear a rotação do planeta. Assim, a contrapartida do afastamento da Lua é a diminuição da velocidade de rotação da Terra e o aumento da duração do dia (atualmente a duração do dia aumenta de cerca de 0,002 segundos por século – isto é, o movimento de rotação da Terra tem uma aceleração negativa de aproximadamente  $0,1''/\text{ano}/\text{ano}$ ).

Na descrição do fenômeno, mais acima, insistimos no fato de que tanto o planeta quanto o satélite são deformados por marés devidas à atração mútua entre eles. Os efeitos das marés do planeta e do satélite sobre o movimento orbital se somam e ambos têm a rotação ao redor dos eixos alterada. Como o planeta é muito maior do que o satélite, a aceleração ou desaceleração da rotação do satélite é muito intensa e ocorre até que um sincronismo seja atingido. É o caso da Lua, “que mostra à Terra sempre a mesma face”; a Lua nos mostra sempre a mesma face porque as ações das marés da Terra sobre a Lua no passado foram tão intensas, que a rotação da Lua foi freada até que ficassem iguais os períodos de rotação da Lua e o de seu movimento ao redor da Terra (o mesmo fenômeno se observa em diversos outros satélites planetários).

Até agora temos falado de satélites que se afastam dos planetas pelos efeitos das marés. Mas o inverso também ocorre, por exemplo, no caso do maior dos satélites de Marte: Fobos. O período de rotação de Marte é semelhante ao da Terra, 24,6 horas, e o período orbital de Fobos é de 7,7 horas. Isto é, o satélite orbita ao redor de Marte, mais rapidamente do que a rotação de Marte. Para um observador em Marte, Fobos tem a peculiaridade de *nascer* a oeste e *se por* a Leste; ao contrário dos demais corpos celestes. Este fato inverte o que está mostrado na Figura 4.8: Fobos não é acelerado pelo efeito da maré que provoca em Marte, mas desacelerado. Portanto, se aproxima do planeta ao invés de dele se afastar como no caso da Lua e de todos os outros grandes satélites dos planetas do Sistema Solar.

No caso da Lua, podemos perguntar até quando irá ela continuar se afastando? Por muito tempo, obviamente, mas não indefinidamente. O processo mais rápido é o da desaceleração da Terra. Alguns cálculos mostram que a Terra continuará tendo seu período de rotação aumentado até atingir cerca de 35 dias, e nessa ocasião essa será também a duração do período de translação da Lua ao redor da Terra. Isto é, a Terra também mostrará para a Lua sempre o mesmo lado; a Lua será então visível apenas de metade da Terra.

Em outros satélites, as marés têm efeitos curiosos. Ao redor de Saturno, os satélites Mimas e Tétis têm períodos orbitais de 22,6 e 45,3 dias, respectivamente. O período de um é quase igual ao dobro do período do outro. E não é por acaso. Por causa das marés que provoca no planeta, Mimas se acelera; no passado, seu período foi aumentando até atingir cerca da metade do período



do de Tétis. Quando isto ocorreu, atingiu-se uma situação estacionária em que Mimas transfere a Tétis uma parte da energia que recebe das marés sobre Saturno. Depois que essa situação de ressonância foi atingida, Mimas continuou a afastar-se do planeta, porém mais lentamente, pois divide a energia recebida com Tétis, que por sua vez também se afasta do planeta, mantendo assim a relação de comensurabilidade entre os períodos desses dois satélites. Também ao redor de Saturno temos outro caso semelhante: Encélado e Dione, com períodos de 32,8 e 65,8 dias. Mas, o caso mais espetacular é o de Io, Europa e Ganimedes, satélites de Júpiter cujos períodos são 42,5, 85,3 e 171,7 dias. Deve ter ocorrido primeiro a ressonância entre Io e Europa, que continuaram se afastando do planeta até entrarem em ressonância com Ganimedes. Neste caso, as velocidades angulares médias dos três satélites são tais que a relação

$$\omega_{Io} - 3\omega_{Eur} + 2\omega_{Gan} = 0, \quad (4.8)$$

é obedecida rigorosamente, como foi demonstrado por Laplace, e esta condição se manterá, praticamente, para sempre.

### *Asteróides*

Os movimentos dos asteróides são muito parecidos com os dos planetas, com variações semelhantes de excentricidade e inclinação. Entretanto, os asteróides conhecidos são dezenas de milhares, dos quais cerca de 50 000 possuem órbitas muito bem determinadas, sendo possível acompanhá-los continuamente em seu movimento ao redor do Sol e observá-los quando em posições de visibilidade favoráveis para nós, na Terra. Pelo seu grande número, encontram-se entre os asteróides movimentos dos mais variados tipos. Se os planetas possuem excentricidades no máximo iguais a 0,25, entre os asteróides elas chegam a quase 0,9; se os planetas movem-se todos próximos ao mesmo plano, com inclinações relativas nunca maiores que 24 graus, asteróides existem com inclinações superiores a 60 graus. Mas os fenômenos mais interessantes encontrados entre os asteróides são os de ressonância e os agrupamentos em famílias.

Os asteróides situam-se, em sua grande maioria, entre Marte e Júpiter e seus períodos orbitais variam entre uns poucos anos e o período de Júpiter, que é de quase 12 anos. Pode ocorrer que um asteróide tenha período comensurável com o de Júpiter (como ocorre com Plutão e Netuno). Por exemplo, quase 60 dos asteróides bem conhecidos têm períodos muito próximos a 8



anos, isto é,  $2/3$  do período de Júpiter. São os Hildas e com eles ocorre algo muito semelhante ao que ocorre com Plutão; a única diferença qualitativa é que os asteróides são interiores à órbita de Júpiter, enquanto Plutão é exterior à órbita de Netuno. São também conhecidos alguns asteróides com períodos iguais a  $1/3$  e  $1/2$  do período de Júpiter; nesses casos, apesar de estarem protegidos de passagens próximas a Júpiter, pela ressonância, como Plutão de Netuno (Figura 4.6), os asteróides são afetados por transições caóticas e podem ter suas excentricidades muito aumentadas. Este fenômeno será discutido na última seção deste capítulo.

Também são conhecidos mais de 1 000 asteróides com períodos em média iguais aos de Júpiter. Estes asteróides, chamados Troianos, movem-se em órbitas parecidas com a órbita de Júpiter e formam dois grupos que se encontram um sempre à frente e outro sempre atrás de Júpiter, a distância entre eles e o planeta oscilando entre 30 e 100 graus. De fato, Lagrange havia mostrado que o sistema formado pelo Sol, Júpiter e um asteróide possui soluções estáveis em que a configuração dos três corpos é um triângulo equilátero permanente. Nessas soluções, os asteróides estariam a exatos 60 graus de Júpiter, à sua frente ou atrás dele. Os asteróides que observamos estão em movimentos oscilatórios ao redor dessas soluções, com períodos entre 150 e 240 anos. Isto é, o mesmo asteróide que hoje vemos a 30 ou 40 graus de Júpiter estará a cerca de 90 ou 100 graus daqui a um século, para depois retornar ao afastamento atual, e assim periodicamente.

Alguns asteróides estão agrupados em famílias. O estudo desses agrupamentos é feito tomando-se por base sua energia e seu momento angular. Entretanto, esses parâmetros não são constantes: um asteróide está quase sempre trocando energia e momento angular com os planetas. Os modelos mais simples indicam que essas trocas possuem, em uma primeira aproximação, caráter múltipériódico. É, portanto, possível calculá-las e separar a energia e o momento angular de um asteróide em duas partes, uma que é característica do asteróide, chamada *própria*, e outra que corresponde às variações induzidas pelos planetas. A parte que chamamos de *própria* permanece constante por muitos milhões de anos, mas nada permite afirmar que permaneça constante para sempre. Analisando como se distribui a parte *própria* da energia e das componentes do momento angular dos asteróides, observa-se que os pontos representativos desses parâmetros não se distribuem uniformemente. Ocorrem acumulações de pontos em diversos lugares do gráfico e é possível, mediante uma análise estatística, verificar que essas acumulações de pontos não podem ser produzidas pelo acaso. Se esses pontos estão acumulados é porque algo em comum existe entre os asteróides que eles representam. Os asteróides representados por pontos que se acumulam no gráfico constituem, então, uma família (Figura 4.9). O fato deles possuírem os mesmos elementos próprios permite supor que eles



tenham se originado da fragmentação de um único corpo. Cerca de 20 famílias são conhecidas; as mais numerosas dentre as bem-estabelecidas são as de Eos (mais de 200 membros), Themis (mais de 200) e Koronis (cerca de 200). Elas são aparentes na Figura 4.9; ademais seus membros apresentam características físicas semelhantes.

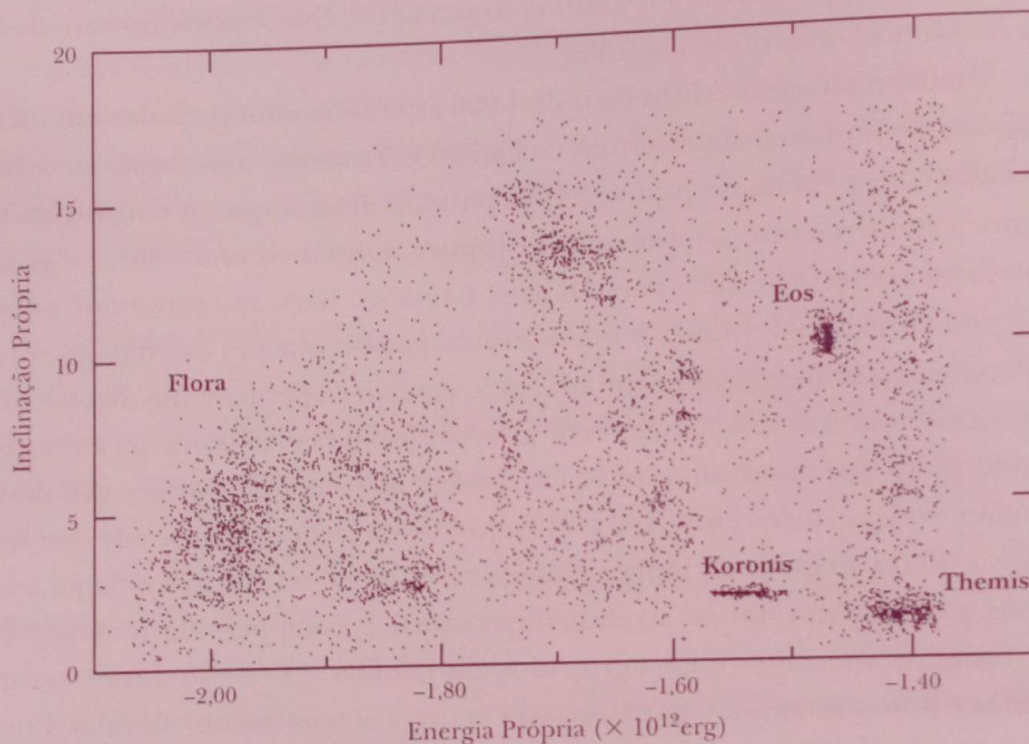


Figura 4.9. Distribuição dos pontos representando a energia própria e a inclinação do momento angular próprio de 6 000 asteróides.

A existência de uma superfamília, Flora, com cerca de 400 membros, ainda está em discussão. A imagem de um dos asteróides dessa família, Gaspra, foi obtida pela sonda espacial *Galileo* (Figura 4.10). A análise de suas crateras mostra que elas são 'recentes'; a fragmentação que deu origem a esse asteróide talvez tenha ocorrido a menos de 500 milhões de anos. A caracterização dinâmica da super-família de Flora ainda depende de refinamentos no cálculo de seus elementos próprios, o que significa melhor conhecimento matemático desse problema, já que simulações numéricas precisas por tempos tão longos não são possíveis devido à caoticidade desses movimentos.

A sonda *Galileo* também imageou Ida, um asteróide da família de Koronis (Atlas, imagem 9). A existência de crateras bastante desgastadas pelos impactos dos micrometeoritos que infestam o espaço interplanetário deixa supor, para esse asteróide, uma idade da ordem de 2 bilhões de anos.





Figura 4.10. Imagem do asteroide Gaspra obtida pela sonda espacial *Galileo* (NASA).

*Cometas*

A principal característica dos movimentos cometários é que suas órbitas não são necessariamente elípticas, como nos demais casos. Vários cometas conhecidos têm órbitas hiperbólicas e muitos órbitas impossíveis de distinguir se são hiperbólicas ou se são elipses altamente excêntricas – na dúvida, eles aparecem nas listas de cometas como tendo órbitas parabólicas. O fato de existirem cometas com órbitas hiperbólicas pode fazer supor que se tratem de objetos oriundos do espaço interestelar, que dele vieram e para ele retornam. Entretanto, o estudo dos cometas com órbitas hiperbólicas mostra, em geral, que suas órbitas se tornaram hiperbólicas após passagens próximas aos planetas do Sistema Solar, principalmente Júpiter. Nesse caso, esses cometas ganharam energia para serem lançados no espaço interestelar. É certo que esses cometas jamais retornarão ao nosso Sistema Solar.

Outro elemento que caracteriza o movimento dos cometas é o fato de que, em suas passagens pelo Sistema Solar interior, os cometas, aquecidos pelo Sol, emitem jatos de matéria sublimada de seu interior. Esses jatos funcionam como pequenos motores à reação e impulsionam o cometa. Embora esses impulsos sejam pequenos, sua ação cumulativa é suficiente para introduzir imprecisões no cálculo da órbita dos cometas. Esses impulsos não são passíveis de modelização. Neste caso, a Mecânica Celeste é aplicada diferentemente dos outros problemas. A impossibilidade de modelizar impede a previsão precisa, mas a comparação das previsões com a rota efetivamente seguida pelo cometa permite determinar o valor das acelerações não gravitacionais a que está submetido e essas acelerações fornecem elementos para que melhor se conheça a física de seu interior.

## OUTROS MUNDOS

A Mecânica Celeste não está limitada ao nosso Sistema Solar. Ela se estende aos demais sistemas de corpos existentes no Universo. A extensão mais imediata leva às estrelas duplas. O movimento das estrelas duplas visuais segue as leis do problema de dois corpos. O estudo do movimento relativo das duas estrelas (movimento de uma delas ao redor da outra) permite determinar o seu período,  $T$ , e o seu semi-eixo maior,  $a$ . O semi-eixo maior medido é um ângulo; mas se a paralaxe da estrela for conhecida, podemos transformar o ângulo em distância. Aplicando então a Lei Harmônica, corrigida por Newton, obtemos a soma das massas das duas estrelas:



$$m_1 + m_2 = \frac{\mu}{G} = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}, \quad (4.9)$$

Se a estrela dupla estiver bastante próxima de modo que possamos observar o movimento das suas duas componentes em relação ao centro de gravidade comum, e assim determinar a posição do centro de gravidade, poderemos saber qual a relação entre as duas massas, já que por definição as distâncias ao centro de gravidade são inversamente proporcionais às massas:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1}{r_2}. \quad (4.10)$$

Desta equação e da anterior, podemos determinar os valores das massas das duas estrelas:  $m_1$  e  $m_2$ . Este ainda é o único método disponível para fazer uma determinação direta da massa de uma estrela.

No caso de estrelas duplas distantes, é possível fazer algo semelhante observando-se as suas velocidades radiais; mas não é possível determinar a inclinação,  $I$ , do plano orbital das duas estrelas em relação à linha de visada. Isso impede conhecer o semi-eixo da órbita; apenas se pode determinar sua projeção na esfera celeste,  $a \cos I$ . Também é bastante difícil determinar a velocidade de cada uma das estrelas do par e, assim, obter informações sobre o seu centro de gravidade. A continuação do trabalho, para estimar o valor das massas, exige que se introduzam hipóteses sobre a relação das duas massas e sobre a inclinação.

Alguns mecânicos celestes também têm se ocupado de sistemas estelares múltiplos, com mais do que duas estrelas. A maior dificuldade nestes casos está em que, havendo muitas estrelas, podem ocorrer fortes aproximações entre elas. Quando duas estrelas se aproximam, a intensidade da força de atração entre elas cresce rapidamente, o que é compensado por um aumento também grande das suas velocidades. Técnicas numéricas especiais, ditas de regularização, são necessárias para se chegar aos resultados. Os resultados mais importantes mostram que as trocas de energia dentro do sistema, a longo prazo, são importantes, podendo ocorrer ejeção de estrelas do sistema utilizando a energia orbital excedente da formação de pares de estrelas duplas dentro do sistema múltiplo, ou simplesmente tornando o resto do sistema mais compacto.

Quando o número de estrelas aumenta muito – como nos aglomerados galácticos e globulares – o problema passa a exigir técnicas específicas de Mecânica Estatística Clássica. Pela sua importância, o tratamento destes problemas constitui uma disciplina à parte, a Dinâmica Estelar. Entretanto, a fronteira da Dinâmica Estelar e da Mecânica Celeste não é nítida, com muitos problemas podendo fazer parte de uma e de outra.



Um novo domínio de aplicação da Mecânica Celeste foi aberto pela descoberta de um grande número de planetas ao redor de estrelas próximas. O problema é semelhante ao das estrelas duplas, mas como planetas não são visíveis, apenas se observam variações na frequência das linhas espectrais da estrela, indicando que ela está se movendo ao redor do baricentro de um sistema planetário. Havendo um planeta de massa  $m$  ao redor de uma estrela de massa  $M$ , um observador situado no baricentro do Sistema Solar veria sua velocidade oscilar com uma amplitude

$$\Delta V = \frac{m}{M} v_p, \quad (4.12)$$

onde  $v_p$  é a velocidade do planeta em sua órbita ao redor da estrela. Se supomos que a órbita do planeta é circular, igualando a força de atração (por unidade de massa) à aceleração radial, podemos substituir  $v_p$  e, portanto, obtemos:

$$\Delta V = \sqrt{\frac{G}{M a}} m. \quad (4.13)$$

As variações que observamos na frequência das linhas espectrais de uma estrela não são, porém, devidas apenas à velocidade da fonte, mas também à velocidade do receptor. Na análise das medidas é preciso levar em conta que o observador está preso à Terra e com ela roda e se move no espaço. Para conseguir uma precisão de 5 m/s na velocidade da estrela (que é o limite atualmente atingido), é necessário que consideremos a velocidade do movimento da Terra ao redor do Sol, que oscila, ao longo do ano, entre 29 e 31 km/s (devido à excentricidade da Terra), o movimento de rotação da Terra, que arrasta um observador de até 460 m/s (no equador), o movimento da Terra ao redor do baricentro do sistema Terra-Lua (13 m/s) e o movimento do Sol ao redor do baricentro do sistema solar devido a Júpiter (13 m/s). Subtraindo-se estas variações das medidas feitas, as variações restantes são devidas ao movimento da estrela. Essas variações se apresentam, em geral, como senóides ligeiramente distorcidas. Se nós nos encontrássemos no plano do movimento do exoplaneta, a semi-amplitude da senóide seria a variação  $\Delta V$  da velocidade da estrela. Caso contrário estaremos observando apenas  $\Delta V \cdot \sin I$ , onde  $I$  é a inclinação do plano da órbita do exoplaneta em relação à esfera celeste ( $I = 0$  seria o caso de um planeta se movendo em um plano perpendicular à linha em que vemos a estrela, caso em que não observaríamos nenhuma variação na velocidade da estrela). Desse modo foram descobertos muitos exoplanetas. Eles já são cerca de 100, mas esse número está aumentando com grande rapidez. De um modo geral, são sempre



planetas muito grandes e se movendo muito próximos à estrela. A equação (4.13) mostra que essas condições são necessárias para que  $\Delta V$  seja grande o suficiente para ser observado. Planetas menores, como a Terra, levam a valores de  $\Delta V$  muito menores e não observáveis; planetas pequenos só poderão ser descobertos com outras técnicas de detecção como, por exemplo, pela súbita diminuição da luminosidade de uma estrela quando um planeta passa pela sua frente.

À medida que as observações se acumulam e se tornam mais precisas, tem sido possível descobrir sistemas em que a variação  $\Delta V$  é mais complexa, apresentando-se como uma composição de várias senóides e indicando, não a presença de um planeta, mas de vários planetas. O sistema planetário extra-solar mais famoso, o primeiro a ser descoberto, foi o da estrela  $\nu$ And<sup>1</sup> com 2 planetas gigantes, bem maiores do que Júpiter, a distâncias 0,8 e 2,5 UA da estrela, e um terceiro planeta, de massa pouco menor que a de Júpiter, bem próximo à estrela (apenas 0,06 UA). Outro sistema interessante é formado pelos planetas da estrela Gliese 876. Os dois planetas conhecidos dessa estrela estão bastante próximos a ela (0,13 e 0,20 UA). O fato marcante dos planetas de Gliese 876 é a ressonância dos seus movimentos. No mesmo tempo que o planeta externo completa uma volta em sua órbita, o interno completa duas voltas. Além disso, os dois planetas se movem em elipses cujos semi-eixos maiores estão alinhados e seus movimentos são sincronizados, de tal modo, que a cada 60 dias os dois planetas se encontram simultaneamente nos periélios de suas órbitas e alinhados com a estrela.

Muitos dos sistemas planetários extra-solares apresentam planetas em movimentos ressonantes. Os primeiros modelos da dinâmica desses sistemas mostram que as ressonâncias decorrem de migrações das órbitas planetárias que as levam a passar por situações de ressonância em que ficam capturadas. Essas migrações parecem ter ocorrido nos estágios finais da formação dos planetas, provocadas pela interação gravitacional entre os planetas e os restos da nuvem de gás e poeira de onde se originaram, e mesmo com os planetésimos que não se acumularam em planetas e sobraram no espaço interplanetário. No caso dos planetas em movimento muito próximos à estrela também é importante a dissipação que ocorre na estrela e no planeta devido às marés que eles provocam um no outro.

Outros objetos que têm revelado a presença de companheiros planetários são os pulsares. No caso dos pulsares, o que se observa é a chegada dos pulsos em radiofrequência na Terra. Se o pulsar que os está emitindo tem um planeta, sua velocidade estará variando, como no caso acima estudado. Se os seus pulsos são emitidos a tempos rigorosamente iguais, quando o pulsar está se movendo no sentido da Terra, o intervalo entre dois pulsos será menor do que quando ele estiver se movendo no sentido que o afasta da Terra. Como a che-

1. N.B.  $\nu$ And = upsilon Andrômeda.



gada dos pulsos pode ser medida com imensa precisão, é possível identificar objetos bastante pequenos eventualmente em órbita ao redor do pulsar. Mas esta alta precisão da medida da chegada dos pulsos precisa ser corrigida de todos os movimentos da Terra em relação ao baricentro do Sistema Solar. Para guardar nas medidas uma precisão de 1 segundo, é preciso considerar uma teoria para o movimento da Terra que inclua as oscilações do centro de gravidade do Sistema Solar devidas aos movimentos de Júpiter e Saturno. Para guardar uma precisão de 0,01 segundo é preciso considerar também as perturbações do movimento do Sol em relação ao baricentro do Sistema Solar devidas a Netuno e Urano, à rotação da Terra, à precessão do eixo de rotação da Terra e ao movimento da Terra ao redor do baricentro do sistema Terra-Lua. Para guardar 0,001 segundo há que se introduzir as alterações devidas a Vênus mas, mais importante, há que se considerar que, como a Terra não está em repouso, o tempo medido por um relógio na Terra não é o mesmo que o de um relógio que estivesse situado no baricentro do Sistema Solar. Há pois uma correção relativista a introduzir. É fácil imaginar que para se guardar uma precisão de 0,000001 segundo, até os efeitos do movimento dos asteróides maiores, como Ceres, devam ser considerados. O caso mais interessante é o do pulsar PSR1257+12. Nesse pulsar, Wolszczan encontrou indícios da existência não de um, mas de três companheiros planetários. Dois desses planetas teriam massas iguais a 2,8 e 3,4 vezes a massa da Terra. O terceiro planeta teria massa pouco maior que a massa da Lua, mas sua existência é de mais difícil confirmação.

Em outros casos, os indícios da existência de um possível planeta são menos claros: é o caso da estrela Beta Pictoris (Figura 4.11). Nesse caso, o que se observa é a existência de uma nuvem de poeira ao redor da estrela. Há dois fatores que fazem pensar na existência de um planeta ao seu redor: (1) as observações parecem indicar que a nuvem, cuja extensão total é de cerca de 150 bilhões de km, não chega até a estrela, com o seu limite inferior estando a cerca de 1 ou 2 milhões de km da superfície da estrela; (2) o efeito relativístico da luz sobre a poeira orbitando ao redor de uma estrela funciona como um freio (efeito Poynting-Robertson), que faz com que as partículas de poeira se movam em espirais até caírem sobre a superfície da estrela. Uma hipótese que permite justificar que a nuvem de poeira circunestelar de Beta-Pictoris não tenha caído sobre a estrela, ainda esteja lá e mostre as características observadas, é que um planeta, ou protoplaneta, algumas vezes maior que a Terra, esteja orbitando entre a nuvem e a estrela. O estudo deste modelo mostra que a interação do planeta com a poeira que está espiralando para dentro é a de forçar as partículas a permanecerem longos períodos em órbitas ressonantes com a do planeta, nas quais a poeira recebe deste último energia e momento angular em quantidades que compensam o freamento devido ao efeito Poynting-Robertson.





Figura 4.11. Imagem da estrela Beta Pictoris. A estrela (centro) se encontra eclipsada por um dispositivo colocado no foco do telescópio (coronógrafo) para possibilitar a observação do tênue disco de poeira que há ao seu redor (NASA).

## CAOS

Nos dias atuais, não é possível falar de Mecânica Celeste sem falar de caos. Uma grande parte dos problemas de que trata a Mecânica Celeste se caracteriza por uma evolução puramente gravitacional, em que são conservadas a energia e o momento angular total do sistema, por tempos da ordem de milhões ou bilhões de anos. A longa evolução nestas condições é propícia ao surgimento de fenômenos caóticos. Mas o que é caos? Caos é um fenômeno observado em vários domínios da natureza e se caracteriza por uma extrema sensibilidade às condições iniciais. Condições iniciais muito próximas podem levar a evoluções totalmente diferentes. Pessoas que trabalham em experiências críticas, sabem que uma experiência que funciona bem no dia de hoje pode simplesmente tornar-se impossível amanhã. Uma das características do caos é exatamente a imprevisibilidade. Consideremos o nosso planeta. Vamos considerar duas Terras, uma real e outra fictícia. O movimento da Terra, em interação com o Sol e os demais planetas, é um movimento caótico, com uma divergência exponencial de órbitas vizinhas de cerca de 1000 vezes em 50 milhões de anos. De maneira grosseira, isso significa que, se as duas Terras estão inicialmente a uma distância de 1 m uma da outra, em 50 milhões de anos essa distância será de 1 km; em 100 milhões de anos 1000 km; em 150 milhões de anos 1000000 km, e em menos de 200 milhões de anos, as duas Terras estarão distantes uma da outra um espaço maior que a distância da Terra ao Sol. Agora, a questão é a seguinte: será que nós conhecemos, hoje, a posição da Terra com uma precisão de 1 m? A resposta é não. Então, nessa nossa história, qual é a Terra de verdade, qual é a de mentira? Não o sabemos. Mas se não conhecemos a posição da Terra, num dado momento, com uma precisão de 1 metro, o mais perfeito dos cálculos não poderá prever sua posição dentro de 150 milhões de anos, com uma "precisão" melhor do que 1 milhão de km. E para deixar claro que o fenômeno caótico não é uma simples propagação de erros, notemos que se fosse possível conhecer a posição da Terra, agora, com uma precisão de 1 micron, em vez de "perdê-la" em 150 milhões de anos, nós a "perderíamos" em 250 milhões de anos. O que acontece é que se nós considerarmos todas as trajetórias possíveis para a Terra, partindo de um ponto no interior de uma bola de 1 micron de diâmetro, em 150 milhões de anos essas trajetórias se encontrariam espalhadas ao longo de um filamento com a extensão de 1 km; 50 milhões de anos depois essa extensão chegaria aos 1000 km; e mais 50 milhões de anos, a 1 milhão de km. Esta é, sem dúvida, uma simplificação extrema do que ocorre, mas dá uma idéia do que significa perder informação sobre um movimento em um ritmo exponencial.



Os fenômenos caóticos nos movimentos celestes foram descobertos nos anos 60. No começo, apenas alguns exemplos eram conhecidos e, durante algum tempo, mostrar que um dado movimento era caótico era um resultado importante. Hoje, a situação inverteu-se. Já sabemos que todos os movimentos celestes são caóticos em algum grau. Movimentos conservativos não-caóticos só existem em exemplos de livros. Um exemplo bem conhecido é o pêndulo simples, um sistema ideal formado por um fio rígido, com um peso em uma ponta e suspenso na outra por um eixo perfeito, sem atrito. Se damos um impulso no pêndulo ideal ele ficará oscilando indefinidamente, sempre da mesma maneira (Figura 4.12a). A amplitude da oscilação será maior ou menor conforme o impulso inicial. Mas, se o impulso for muito forte, o pêndulo, em vez de oscilar, passará a girar (Figura 4.12b). Vemos assim que o pêndulo ideal é um sistema dinâmico que tem dois regimes de movimento: um regime em que o peso oscila ao redor da sua posição mais baixa e outro em que o peso fica girando. Esses dois regimes são perfeitamente separados. O pêndulo ou oscila ou gira. Agora, se o peso é de ferro, e se perturbamos o movimento do pêndulo colocando-o próximo de um eletroímã que cria um campo magnético variável, quebra-se a perfeita separação entre os dois regimes de movimento. O pêndulo poderá oscilar, girar ou ter um movimento em que alterna os dois regimes, girando, depois oscilando, depois voltando a girar, e assim por diante. Isto também é caos. Soluções próximas à separação crítica entre os dois regimes de movimento serão extremamente sensíveis às condições iniciais.



Figura 4.12. Regimes de movimento de um pêndulo simples. (a) Oscilação; (b) Rotação.

Esta alternância entre diversos regimes de movimento é uma característica dos movimentos planetários caóticos. Não que os planetas possam inverter seu sentido de movimento ou oscilar como um pêndulo. Mas as órbitas em que circulam ao redor do Sol podem fazê-lo. Quando consideramos apenas um planeta e o Sol, a órbita planetária é uma elipse fixa. Mas quando consideramos



todos os planetas, como já discutimos mais acima, as elipses deixam de ser fixas; sua orientação vai variar e sua excentricidade e inclinação também. O eixo da elipse pode ficar girando (como na Figura 4.4a), mas pode também ficar oscilando ao redor de uma direção fixa.

Os exemplos mais interessantes de movimentos caóticos ocorrem nos asteróides, que se situam entre as órbitas de Marte e de Júpiter. Quando os asteróides se movem em órbitas cujos períodos são comensuráveis com o período de Júpiter, a ressonância dos períodos do asteróide e de Júpiter faz com que, como no pêndulo, diversos regimes de movimento possam ocorrer. Os asteróides cujos períodos são iguais a  $1/3$  do período de Júpiter, por exemplo, exibem três regimes de movimentos principais, como mostrados na Figura 4.13, e a dinâmica caótica desses asteróides lhes permite alternar entre um regime de movimento e outro, em escalas de tempo inferiores a 1 milhão de anos. A transição do regime de baixa excentricidade (a) para o regime de excentricidades médias (b) foi uma primeira explicação para a quase inexistência de asteróides em órbitas com período igual a  $1/3$  do período de Júpiter. Ao entrar nesse regime, a órbita do asteróide se alonga de modo a permitir-lhe, de tempos em tempos, aproximar-se de Marte. Quando isto ocorre, a atração de Marte sobre o asteróide o desvia de sua órbita original e a energia que ele cede ou recebe é suficientemente grande para alterar o período do movimento, que deixará de ser  $1/3$  do período de Júpiter. Trabalhos mais recentes mostram que o destino de um asteróide cujo período é  $1/3$  do período de Júpiter está regulado principalmente pelas transições ao regime de alta excentricidade (c). Embora as transições para este regime sejam menos freqüentes que as transições para o regime de excentricidades médias (b), elas são fatais. Marte tem uma massa muito pequena, e um asteróide pode permanecer no regime (b) por milhões e milhões de anos sem aproximar-se de Marte suficientemente para que seja desviado de sua órbita. Mas, no regime de alta excentricidade (c), a órbita se torna tão alongada que o asteróide cruza as órbitas de planetas maiores, como a Terra e Vênus, que são 10 vezes mais massivos que Marte, podendo ser desviada por estes planetas (Figura 4.14). Mas a realidade parece ser ainda mais violenta. A órbita pode mesmo alongar-se tanto que o asteróide se aproxima do Sol. E essa aproximação é fatal. As forças de maré que o Sol provoca no asteróide o destroem muito antes que uma possível colisão com o Sol ocorra. E esta pode ser a origem de muitos meteoritos que caem sobre o nosso planeta. Muitos asteróides parecem fadados a desaparecer depois de um mergulho em direção ao Sol.

Ao misturar regimes de movimento, os fenômenos caóticos afetam diretamente a evolução do nosso Sistema Solar. A aparente harmonia que observamos, resultado de uma evolução de 5 bilhões de anos, não é eterna. As instabilidades de natureza caótica agem lentamente e, como foi recentemente descoberto, se



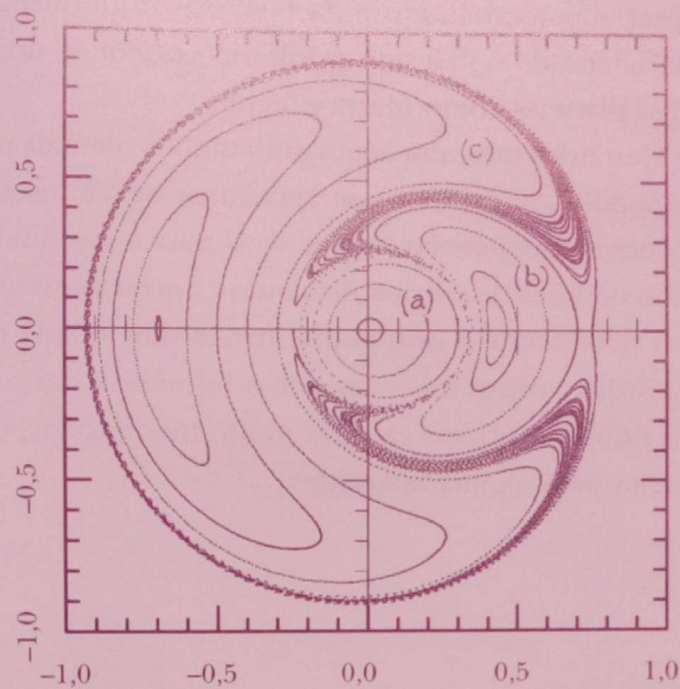


Figura 4.13. Regimes de movimento da órbita de um asteroide cujo período orbital médio é  $1/3$  do período de Júpiter, de acordo com Ferraz-Mello e Klafke. Nesta figura (em coordenadas polares), o raio vetor representa a excentricidade da órbita do asteroide e o ângulo polar representa a distância angular entre os periélios das órbitas do asteroide e de Júpiter. Regimes: (a) a órbita do asteroide é próxima de uma órbita circular (excentricidade pequena) e seu periélio está circulando; (b) a órbita do asteroide tem grandes variações de excentricidade (entre 0,2 e 0,4) e permanece com seu periélio oscilando na direção do periélio de Júpiter; (c) a órbita do asteroide tem enormes variações de excentricidade (na órbita mais externa ultrapassa 0,9) e seu periélio apresenta grandes oscilações ao redor da direção contrária à do periélio de Júpiter. Essas regiões não são estanques e a órbita pode passar de um regime a outro.



Figura 4.14. Imagem de radar do asteroide Toutatis. O movimento deste asteroide se situa no regime de corrotação. Sua órbita é bastante excêntrica e ele cruza a órbita da Terra. A figura mostra sua imagem feita a partir dos ecos de radar em sua superfície, obtidos em 8.12.1992, quando passou a pouco mais de 3,5 milhões de km da Terra. Uma passagem ainda mais próxima (1,5 milhões de km, cerca de 4 vezes a distância da Terra à Lua) ocorrerá em 29.9.2004. As dimensões de Toutatis são  $1,9 \times 2,4 \times 4,6$  km (NASA).

não fosse pela presença estabilizadora da Lua, o eixo de nossa Terra sofreria grandes variações alterando o delicado equilíbrio sazonal de nosso planeta. Isto ocorre com outros planetas como Marte e Vênus.

O planeta Mercúrio, que vem acompanhando os demais planetas desde a origem do Sistema Solar, poderá vir a se aproximar de Vênus nos próximos 10 bilhões de anos, com conseqüências imprevisíveis para o seu futuro. Talvez, eventos violentos como colisões de corpos deixando enormes crateras nos planetas, a captura da Lua pela Terra, e outros que temos dificuldade de imaginar, tenham ocorrido porque corpos menores, sob a influência das perturbações dos maiores, tenham tido suas órbitas caóticas muito modificadas, variando da maneira acima descrita para alguns asteróides.